



EPFL

**Enseignants:** Candil, Dubuis, Huruguen

Algèbre Linéaire & Géométrie - MAN

4 juillet 2022

Durée : 180 minutes

X

## Examen (énoncé)

SCIPER: **xxxxxx**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, la dernière étant vide. Il y a 12 questions pour un total de 42 points. Merci de ne pas dégrafer le livret.

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
  - Aucun **document** n'est autorisé.
  - L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
  - Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
    - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
    - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
    - 0 point si la réponse est incorrecte.
  - Utilisez un **stylo à encre noire** ou **bleu foncé** sauf éventuellement pour vos dessins que vous pouvez faire au **crayon**.
  - Effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
  - Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
  - Les **feuilles de brouillon** ne seront pas ramassées.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<hr/>		
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
		



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

### Enoncé

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-2 \quad 3 \quad -4) + \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \quad 18 \quad -1) + \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 57 \end{pmatrix} (6 \quad -7 \quad 2)$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

**Question 1** (1 point) Donner le coefficient situé sur la deuxième ligne et troisième colonne de  $A$  :

58

-306

62

50

**Question 2** (1 point) Que vaut le coefficient situé sur la première ligne et deuxième colonne de  $B^{-1}$  ?

$-\frac{3}{20}$

$-\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{3}{20}$

**Question 3** (2 points) Quel est le rang de la matrice  $CD$  ?

1

2

0

3

**Enoncé**

Notons  $\mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2, e_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On donne deux applications linéaires :

$$f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de matrices respectives :

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \quad \text{et} \quad B = [g]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

en base canonique. On suppose qu'en faisant subir à  $A$  les opérations suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1, \quad L_2 \leftarrow 2L_2, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2, \quad L_1 \leftrightarrow L_3,$$

on obtient la matrice  $B$ .

**Question 4 (2 points)** Si  $\det f = 12$ , combien vaut  $\det g$  ?

-24

6

24

-6

**Question 5 (2 points)** Sélectionner les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  ci-dessous qui vérifient que:

$$B = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, 2e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, 2e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, \frac{1}{2}e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, \frac{1}{2}e_2, e_1 \end{cases}$

**Question 6 (2 points)** On sait que :

$$\text{Ker } g : x = \frac{y}{2} = z.$$

Parmi les matrices suivantes, une seule est ligne-équivalente à  $A$ . Laquelle ?

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

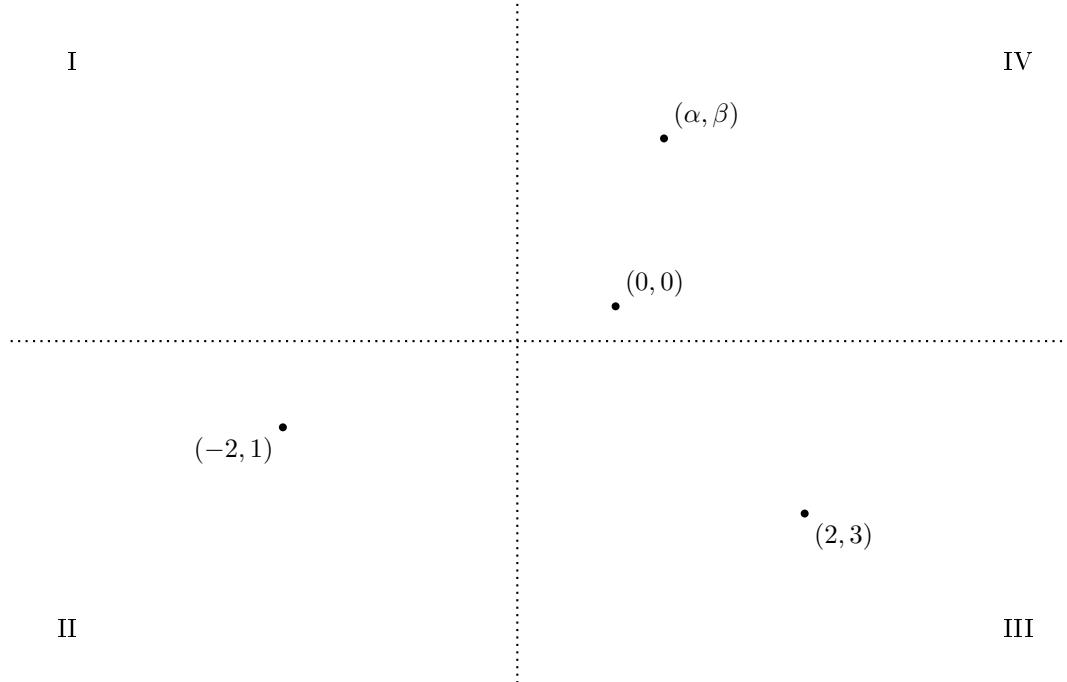
$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

**Enoncé**

On visualise  $\mathbb{R}^2$  comme ci-dessous (vous pouvez écrire sur le dessin) :



Les deux droites représentées en pointillés découpent le plan en quatre zones numérotées en chiffre romain de I à IV. Par exemple,  $(0, 0)$  et  $(\alpha, \beta)$  appartiennent à la zone numérotée IV. Dans quel zone se trouve ...

**Question 7** (2 points) ...  $(0, 1)$  ?

 III IV II I

**Question 8** (3 points) ...  $f(\alpha, \beta)$ , où l'application linéaire  $f$  est définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (-3x + 2y, \frac{3}{2}x - y) ?$$

 III IV II I

**Question 9** (3 points) ...  $g(\alpha, \beta)$ , où l'application linéaire  $g$  est définie par :

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (-\frac{1}{2}x + y, \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y) ?$$

 III II IV I



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

**Question 10:** *Cette question est notée sur 9 points.*

0       1       2       3       4       5       6       7       8       9

On considère les éléments suivants de  $\mathbb{R}^3$  :

$$v_1 = (-1, 2, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (0, 3, 1), v_4 = (2, 5, 3), v_5 = (-3, 4, 5).$$

Soit aussi le plan vectoriel  $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

- (a) Déterminer une équation de  $V$ . Est-ce que  $v_5$  appartient à  $V$  ?  
 (b) Pour  $v = (x, y, z) \in V$ , écrire la décomposition de  $v$  sur la base suivante de  $V$ :

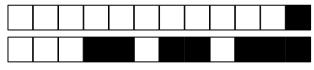
$$\mathcal{B} = v_1, v_2.$$

En déduire les coordonnées  $[v]_{\mathcal{B}}$  de  $v$  dans  $\mathcal{B}$ .

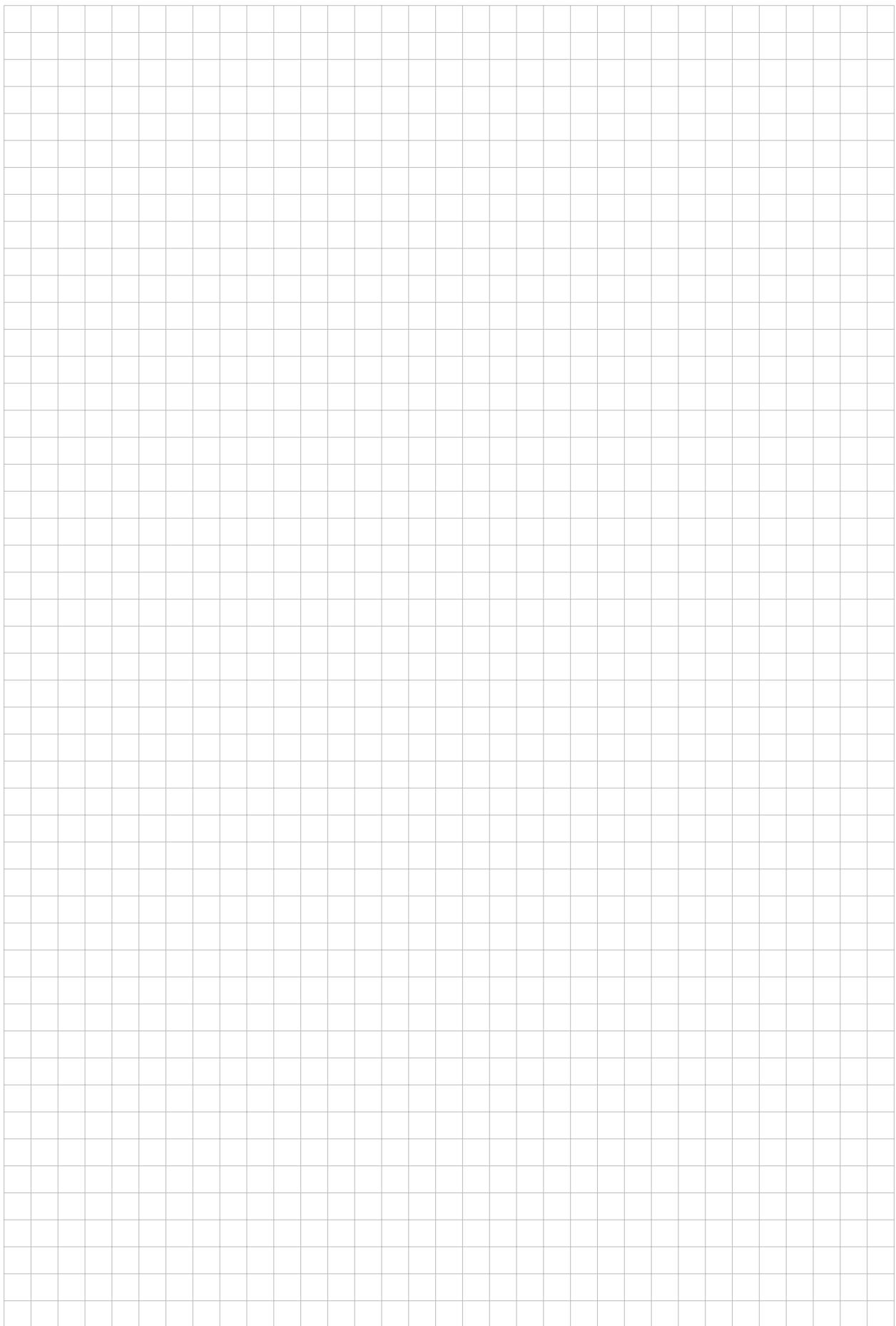
- (c) Soit la famille :

$$\mathcal{B}' = v_3, v_4.$$

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $V$  et donner la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

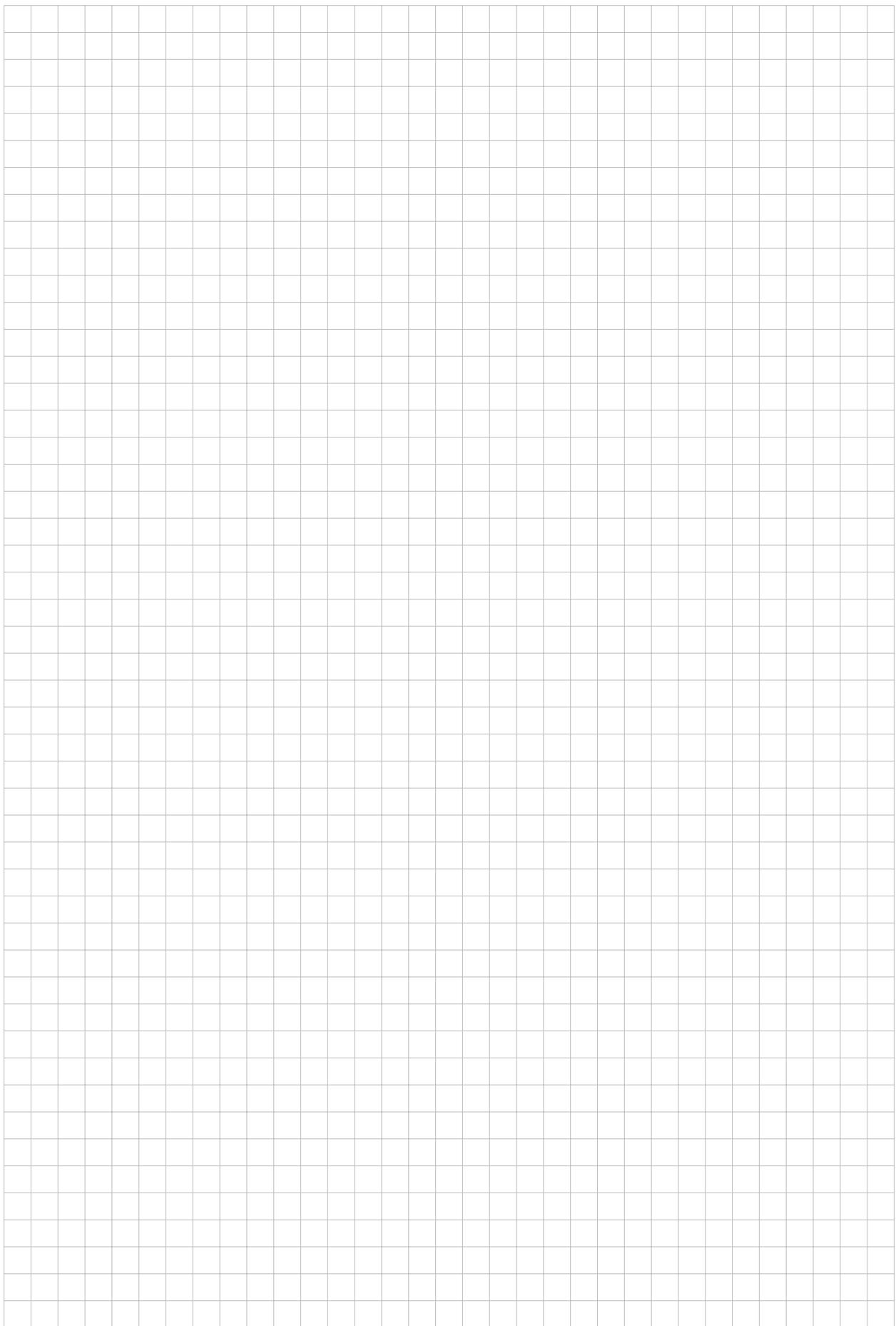


+1/6/55+



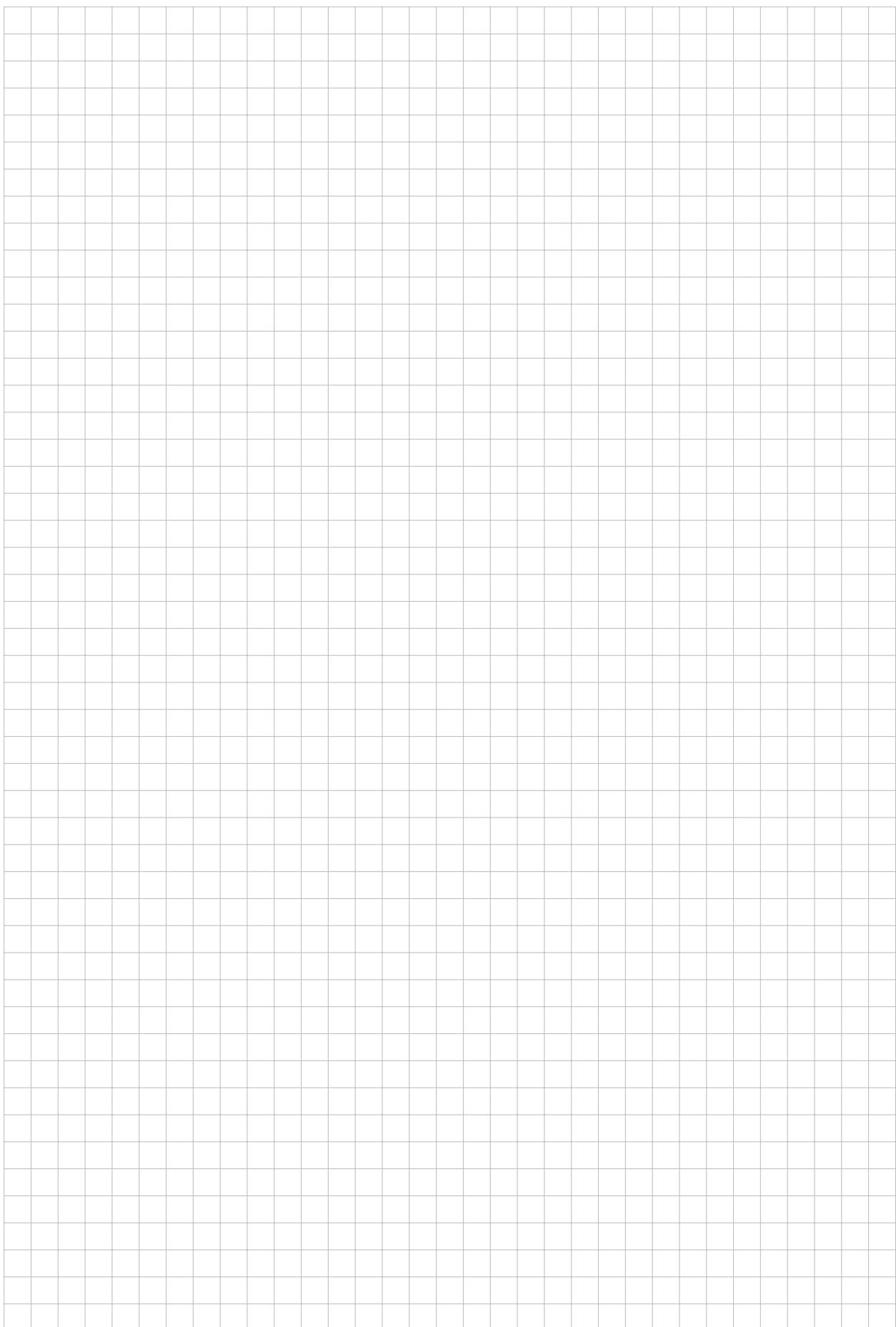


+1/7/54+





+1/8/53+





**Question 11:** Cette question est notée sur 6 points.

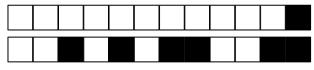
0     1     2     3     4     5     6

On donne l'application linéaire :

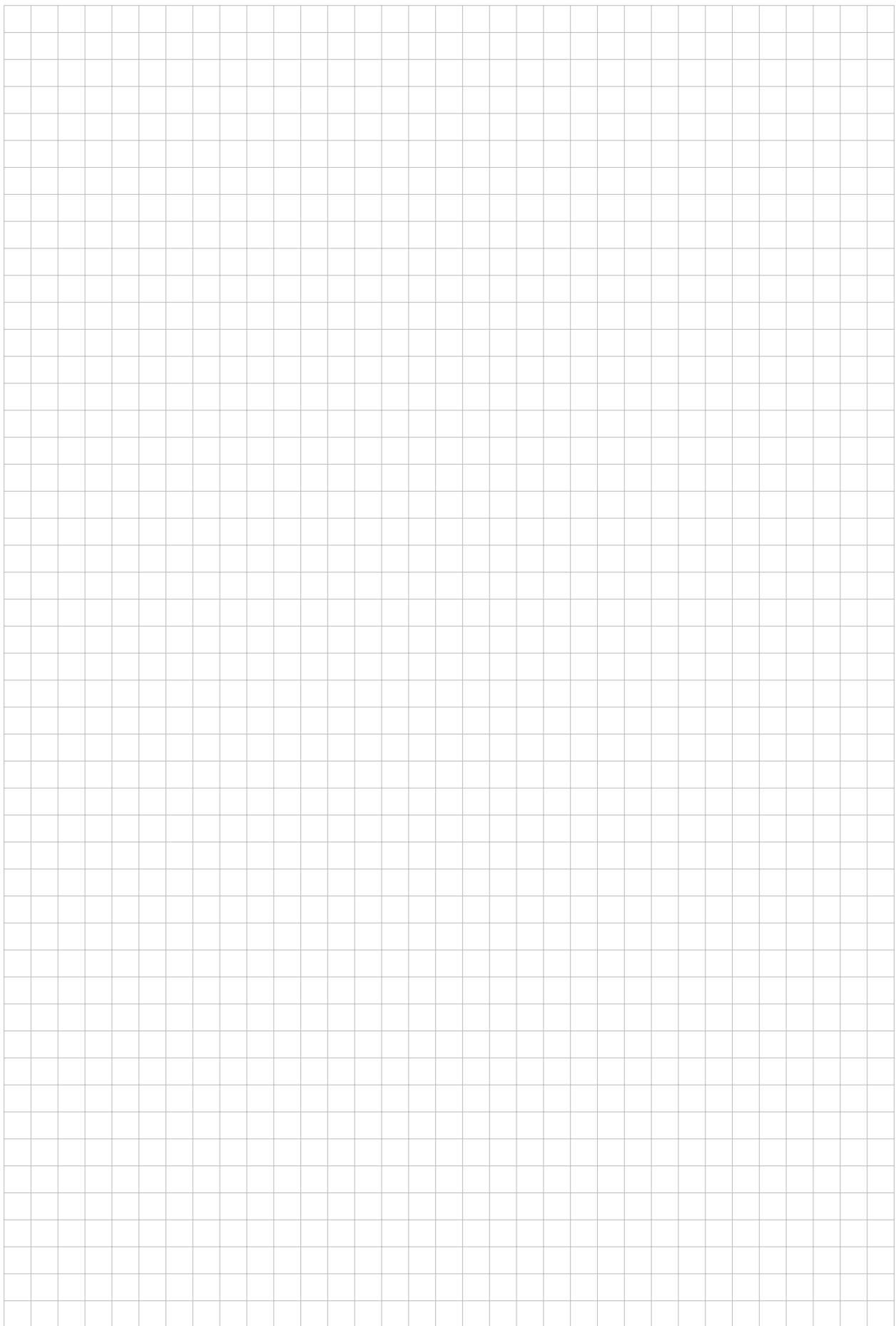
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \left( -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z, 6x - 3y + 2z \right).$$

- (a) Ecrire la matrice de  $f$  en base canonique et en donner une décomposition colonne-ligne minimale.
- (b) Déterminer une équation de  $\text{Im } f$  et une base de  $\text{Ker } f$ .
- (c) Sans aucune justification, donner une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  et une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

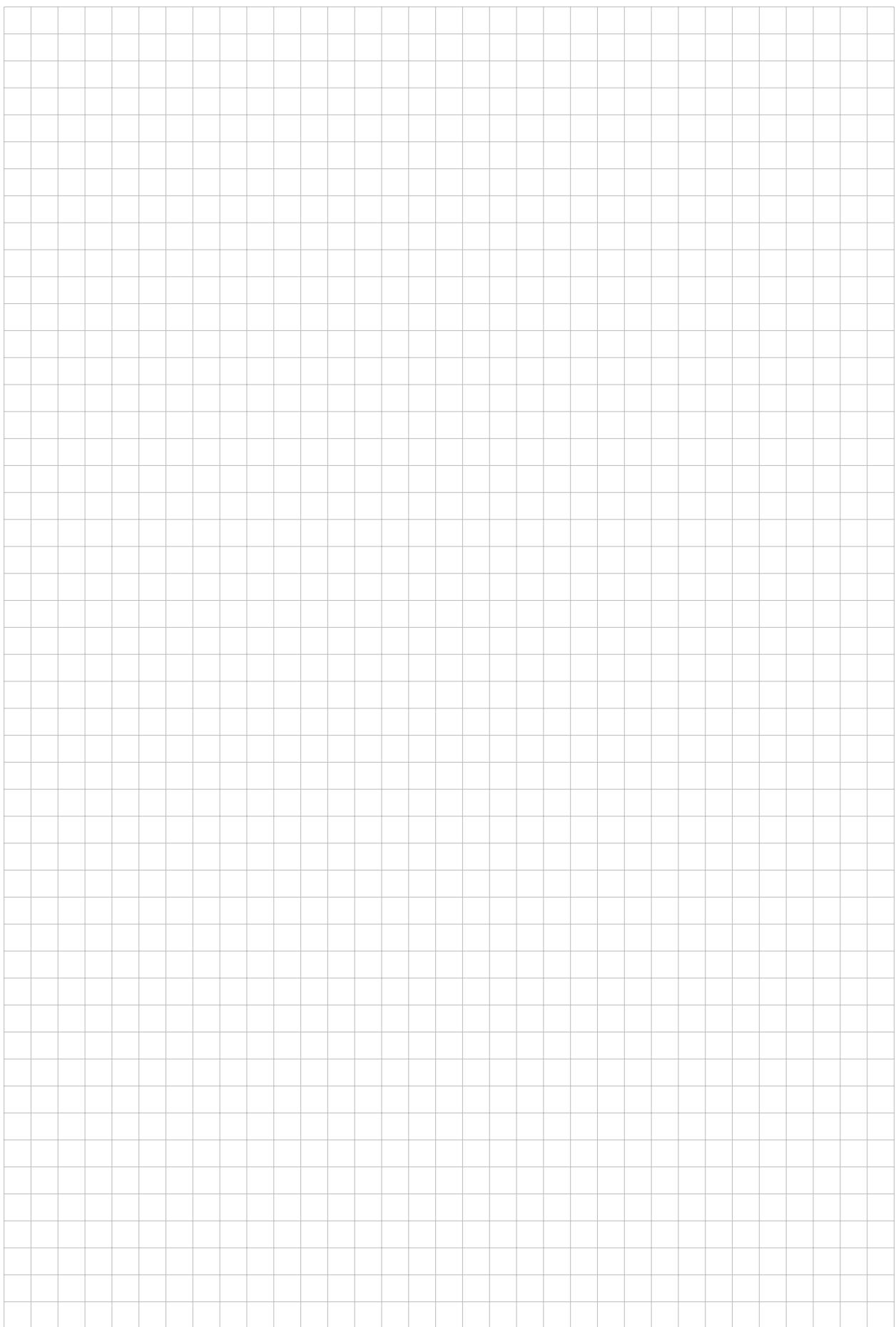


+1/10/51+





+1/11/50+





**Question 12:** Cette question est notée sur 9 points.

<sub>0</sub>     <sub>1</sub>  <sub>2</sub>  <sub>3</sub>  <sub>4</sub>  <sub>5</sub>     <sub>6</sub>  <sub>7</sub>  <sub>8</sub>  <sub>9</sub>

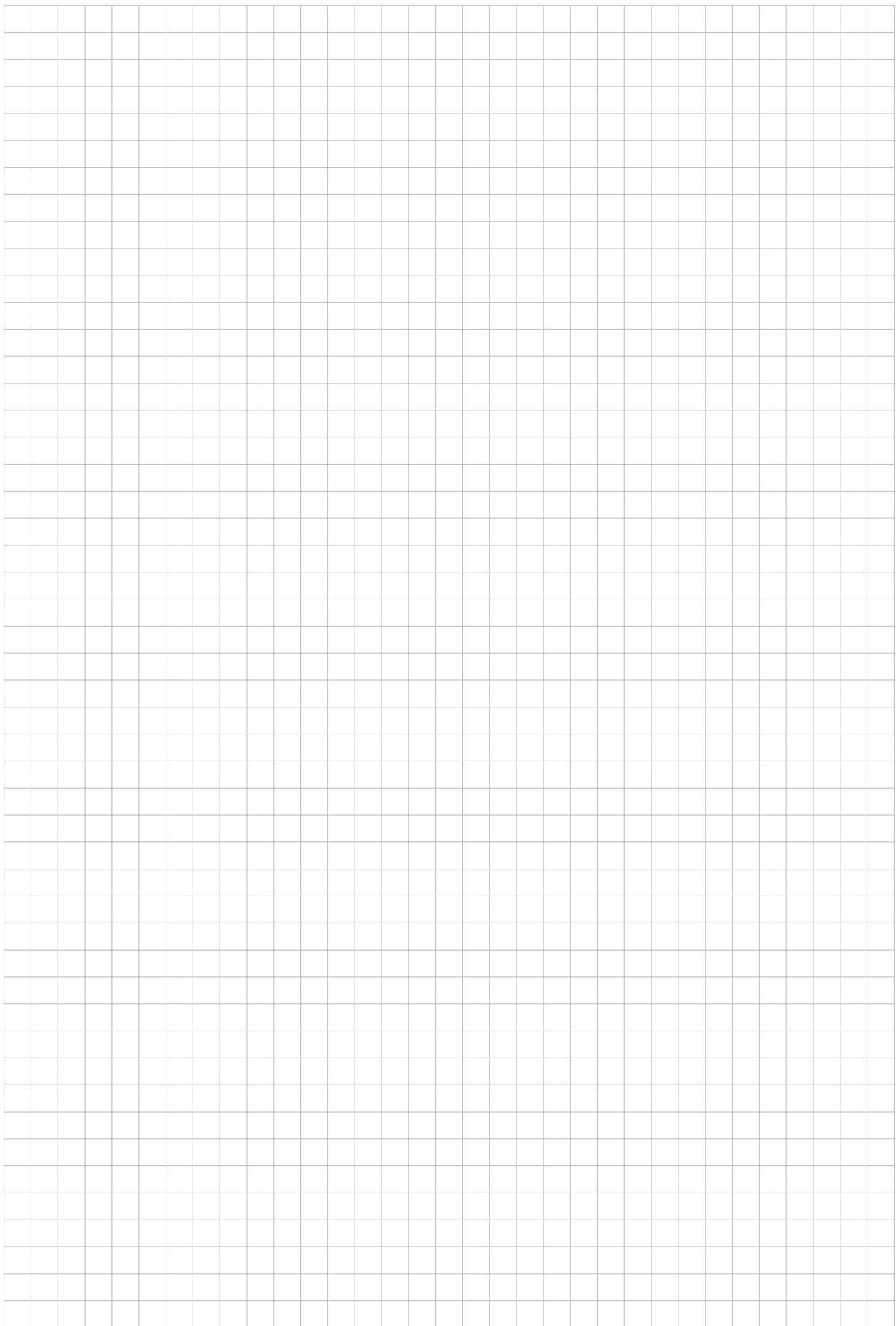
On donne l'application linéaire :

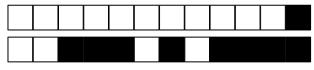
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (5x - 4y, 4x - 3y).$$

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de  $f$ . En déduire une forme réduite de  $f$ .
- (b) Déterminer une base de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle  $f$  est représentée par la forme réduite trouvée au (a).
- (c) Pour tout entier  $n \geq 1$ , déterminer  $A^n$ , où  $A$  est la matrice de  $f$  en base canonique.

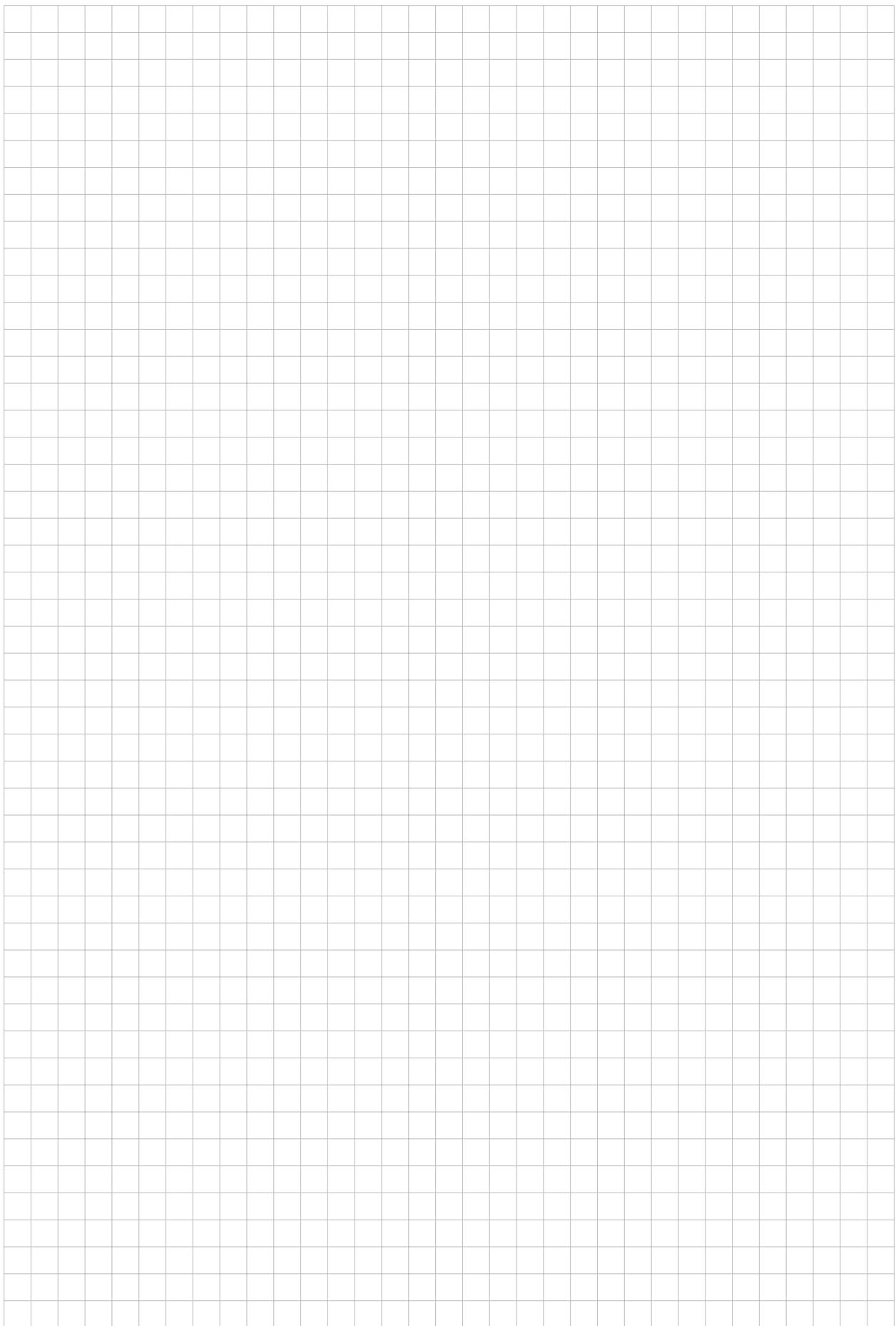


+1/13/48+



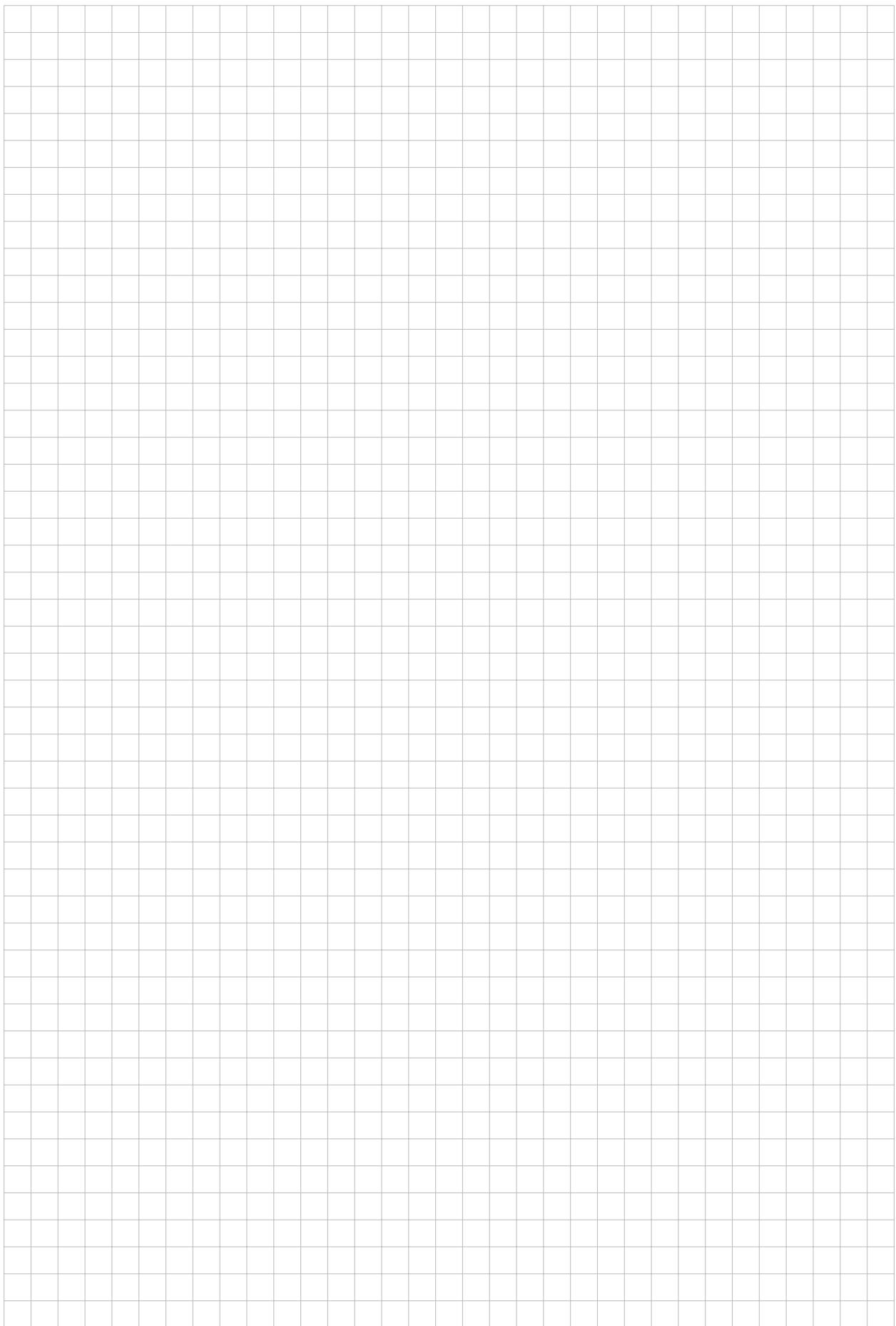


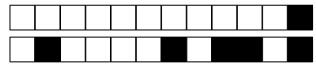
+1/14/47+





+1/15/46+





+1/16/45+

